

1. VECTORES

Iván Vargas Blanco

Físico

Profesor, Instituto Tecnológico de Costa Rica

1.1 CANTIDADES VECTORIALES Y ESCALARES

Definición de Magnitud

Atributo de un fenómeno, cuerpo o sustancia que puede ser distinguido cualitativamente y determinado cuantitativamente¹. También se entiende como cantidad física formada por un número y la unidad de medida respectiva. *Ejemplos:* 0.3 μm , 3 km, 24 m/s, 12 J.

Definición de Escalar

Cantidad física que solo tiene magnitud. Son ejemplo de escalares: distancia, masa, tiempo, rapidez, temperatura, área, volumen, densidad, trabajo, energía, potencia y frecuencia. Los escalares pueden ser manipulados por las reglas del álgebra ordinaria.

Ejemplos: 4 m, 5 kg, 60 s, 20 m/s, 37 °C, 8 m², 4 m³, 24 Kg/m³, 1.78 J, 50 W y 333 Hz

Definición de Vector

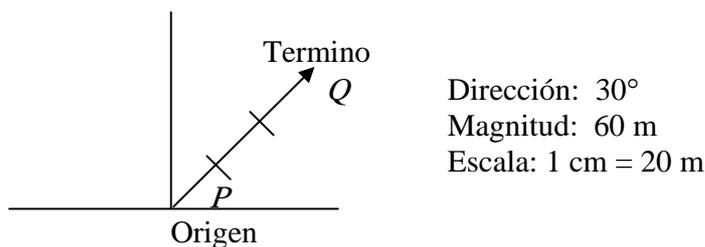
Cantidad física que tiene magnitud, dirección y sentido. Son ejemplo de vectores: la velocidad, la aceleración, la fuerza, el peso, la cantidad de movimiento, el desplazamiento, campo eléctrico y el campo magnético. (la palabra *vector* significa *portador* en latín).

Ejemplos: -4 m/s, +9.8 m/s², 500 N 30°, -25 Kg m/s y -20 m

Representación gráfica de vectores

Un vector se representa gráficamente, como un segmento dirigido de recta \overrightarrow{PQ} de un punto P llamado *punto inicial o origen* a otro punto Q llamado *punto terminal o termino*. Una punta de flecha en un extremo indica el **sentido**; la longitud del segmento, interpretada con una escala determina la **magnitud**. La **dirección** del vector se especifica al dar los ángulos que forma el segmento de recta con los ejes de coordenadas.

Ejemplo:



¹ Peste F. *Vocabulario Internacional de Términos Fundamentales y Generales de Metrología*. Centro Nacional de Metrología. México. 1996

Notación de vectores

Algebraicamente los vectores se representan con letras del alfabeto castellano, mayúsculas o minúsculas; usualmente en un texto impreso se utiliza la letra en negrita, tal como **b** que significa ambas propiedades del vector, magnitud y dirección. En la escritura manual ponemos una flecha sobre la letra para denotar la cantidad vectorial, tal como \vec{b} .

Ejemplos:

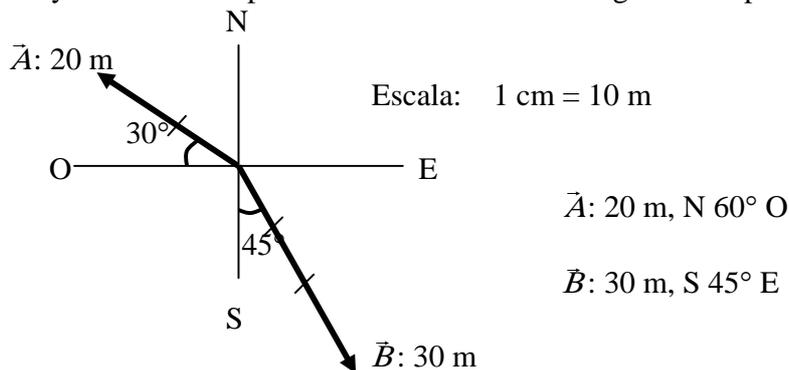
\vec{a} : -35 m/s, \vec{A} : 50 millas Norte, \vec{b} : 15 km Suroeste, \vec{B} : 20 m Oeste, \vec{PQ} : 50 m/s 30°

La magnitud o longitud de un vector se representa colocando el vector entre barras o simplemente la letra asignada.

$|\vec{A}| = 50$ millas, $A = 50$ millas, $|\vec{PQ}| = 50$ m/s, $PQ = 50$ m/s

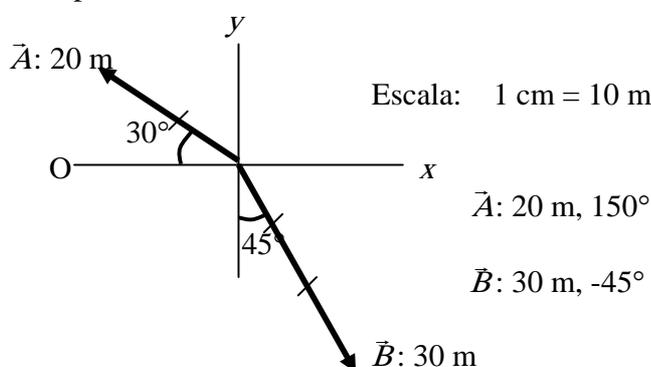
Dirección de un vector con puntos cardinales

Para dar la dirección de un vector mediante puntos cardinales se anota de primero el punto cardinal norte o sur de acuerdo a la ubicación del vector, luego el ángulo que forma con el norte o sur y finalmente el punto cardinal este u oeste según corresponda.



Dirección de un vector con la medida del ángulo (*coordenadas polares*)

En este caso se anota la magnitud del vector y el ángulo que forman la rama positiva del eje X y el vector, el ángulo se toma como positivo o negativo en la misma forma que se hace en los estudios de trigonometría. La magnitud del vector y el ángulo son llamados coordenadas polares.

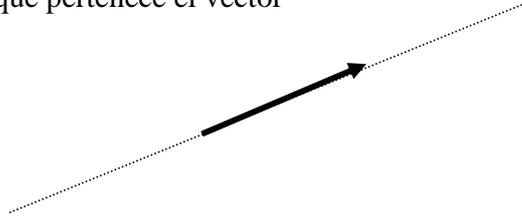


La magnitud y el ángulo son llamadas **Coordenadas Polares**

Clasificación de vectores**Definición de línea de acción de un vector**

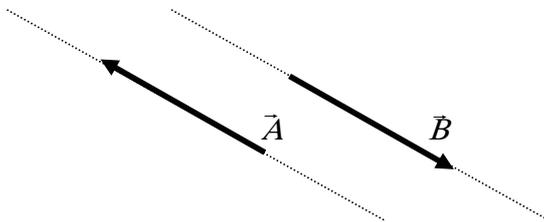
Es la recta a la que pertenece el vector

Ejemplo:

**Vectores paralelos**

Son aquellos que tienen sus líneas de acción paralelas.

Ejemplo:

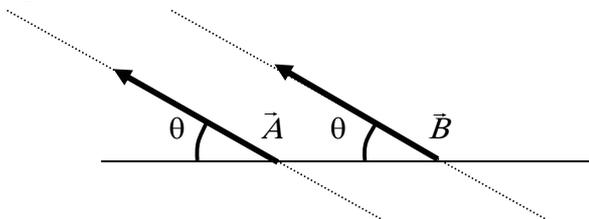


$$\vec{A} \parallel \vec{B}$$

Vectores iguales

Son aquellos vectores que tienen la misma magnitud, dirección y sentido aunque no tengan el mismo punto de aplicación.

Ejemplo:

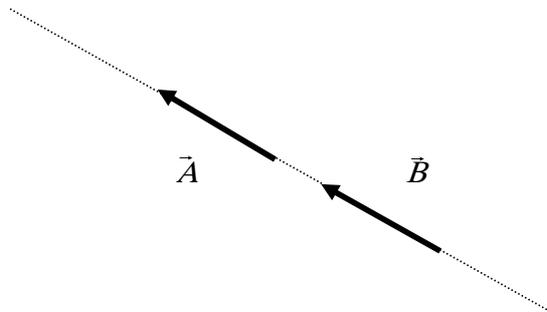


$$\vec{A} = \vec{B}$$

Vectores deslizantes

Son aquellos vectores que pueden moverse sobre su línea de acción sin cambiar su magnitud y dirección.

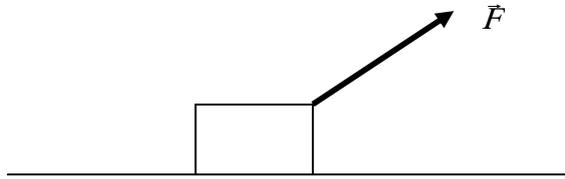
Ejemplo:



Vectores fijos

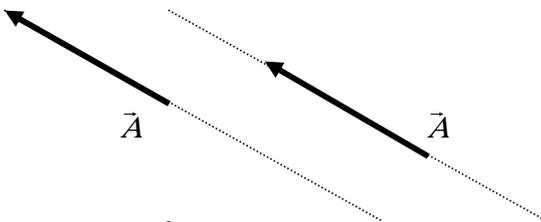
Son aquellos vectores que no deben deslizarse sobre su línea de acción porque interesa que el origen coincida con un punto de aplicación del sistema.

Ejemplo:

**Vectores libres**

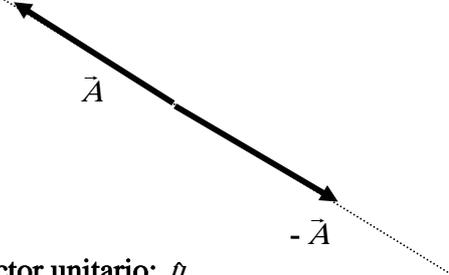
Son aquellos vectores que pueden moverse libremente en el espacio con sus líneas de acción paralelas.

Ejemplo:

**Vector opuesto de un vector**

Se define como aquel que tiene la misma magnitud del vector y está a 180° respecto al vector y se representa como el negativo del vector, $\vec{a} \Rightarrow -\vec{a}$ por lo cual se le llama vectores iguales y opuestos o **antiparalelos**. Un vector puede ser opuesto a otro si solo tiene dirección opuesta.

Ejemplo:

**Vector unitario: \hat{u}**

Es aquel vector de magnitud la unidad o longitud unitaria y de igual dirección que el vector dado. Si \vec{A} o \vec{A} es un vector cualquiera de longitud $A > 0$, entonces \vec{A}/A o \vec{A}/A es un vector unitario denotado por \hat{a} o \hat{a} , con la misma dirección de \vec{A} . Por lo tanto $\vec{A} = A\hat{a}$ o $\vec{A} = A\hat{a}$

Ejemplo:

$$\vec{A} : 7 \text{ m } 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \hat{a} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{7 \text{ m } 60^\circ}{7} = 1 \text{ m } 60^\circ$$

$$\hat{a} : 1 \text{ m } 60^\circ$$

Por lo tanto podemos escribir el vector \vec{A} como

$$\vec{A} = A\hat{a}$$

$$\vec{A} = 7\hat{a} \text{ m}$$

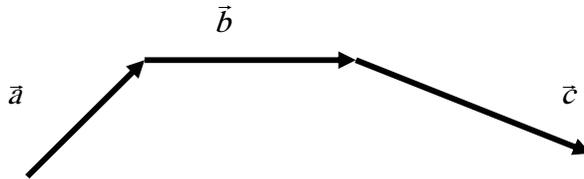


Este es uno de los vectores más importantes

Vectores consecutivos

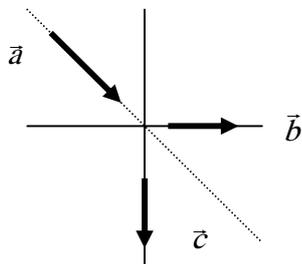
Son aquellos vectores donde el término de uno coincide con el origen del siguiente.

Ejemplo:

**Vectores concurrentes**

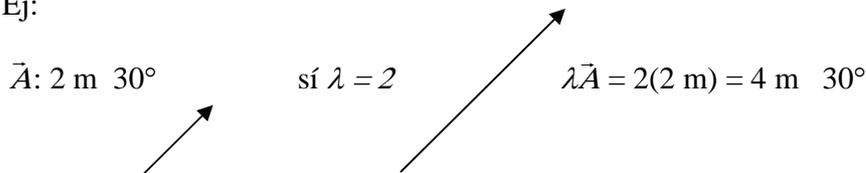
Son aquellos vectores cuyas líneas de acción se intersecan en un punto.

Ejemplo:

**1.2 OPERACIONES CON VECTORES GRÁFICAMENTE****a) Multiplicación de un escalar por un vector gráficamente**

Si se multiplica un escalar λ por un vector \vec{A} resulta el vector $\lambda\vec{A}$ cuya magnitud ha sido multiplicada por λ y el sentido depende del signo del escalar.

Ej:

**Practica 1.1**

Dado el vector $\vec{a}: 50 \text{ m } 300^\circ$. Hallar:

- La representación del vector
- El vector opuesto de \vec{a}
- El vector unitario de \vec{a}
- Un vector concurrente a \vec{a}
- Un vector consecutivo a \vec{a}
- Un vector perpendicular a \vec{a}
- Un vector cuya magnitud sea $\frac{1}{2}\vec{a}$

b) Suma gráfica de vectores

Para sumar vectores gráficamente existen diferentes métodos:

Método del triángulo

Es el método para sumar dos vectores consecutivos formando un triángulo con la resultante.

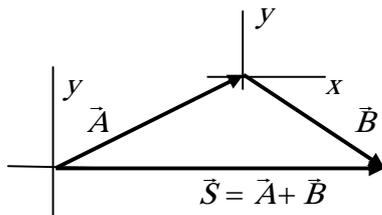
Se deben seguir los siguientes pasos:

1. En un diagrama dibujado a escala trazar el vector \vec{a} con su dirección propia en el sistema de coordenadas.
2. Dibujar el vector \vec{b} a la misma escala con la cola en la punta de \vec{a} , asegurándose de que \vec{b} tenga su misma dirección propia.
3. Se traza un vector desde la cola de \vec{a} hasta la punta del vector \vec{b} . Se mide la longitud del vector resultante y se realiza conversión con la escala, esto nos da la magnitud del vector suma. Luego se mide el ángulo que forma el vector suma con la rama positiva del eje X.

Ejercicio 1.1

Dados los siguientes vectores: \vec{A} : 30 m , 35° , \vec{B} : 20 m , -45° . Obtener el vector suma $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$, mediante el método del triángulo.

Solución:

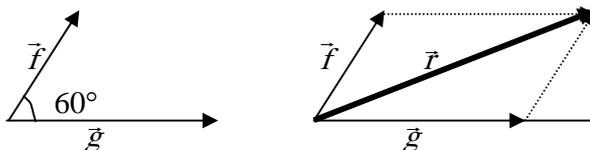
**Método del paralelogramo**

Es el método para sumar vectores concurrentes. Se dibujan los vectores \vec{f} y \vec{g} con origen común, luego en la figura se traza una paralela a \vec{f} y por el término de \vec{f} se traza una paralela a \vec{g} ; ambas paralelas y los dos vectores forman un paralelogramo. El vector resultante \vec{r} de sumar \vec{f} y \vec{g} se traza desde el origen de ambos vectores hasta la intersección de las paralelas. Se mide la longitud del vector resultante y se realiza conversión con la escala, esto nos da la magnitud del vector suma. Luego se mide el ángulo que forma el vector suma con la rama positiva del eje X.

Ejercicio 1.2

Dados los siguientes vectores: \vec{f} : 25 m 60° , \vec{g} : 35 m 0° . Obtener el vector suma $\vec{r} = \vec{f} + \vec{g}$, mediante el método del paralelogramo.

Solución:



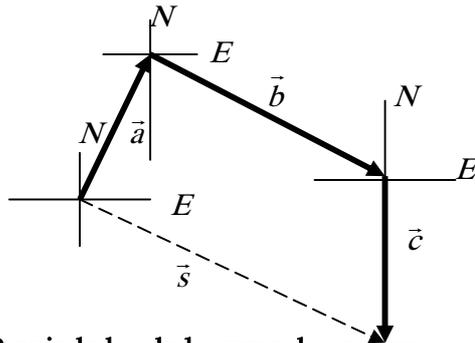
Método del polígono

Para sumar vectores por el método del polígono se colocan los vectores consecutivos y el vector suma es la resultante que va desde el origen del primer vector al término del último vector.

Ejercicio 1.3

Un auto se desplaza 300 m del Norte 30° al Este, luego 500 m del Sur 60° al Este y finalmente 300 m al Sur. Hallar la distancia y dirección a la que quedo del punto de inicio.

Solución:

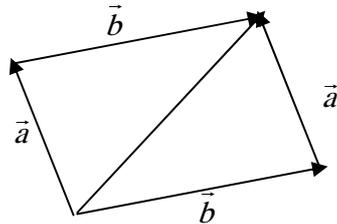


$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Propiedades de la suma de vectores

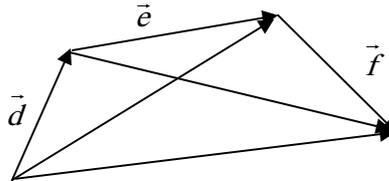
1. Ley conmutativa para la suma.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$



2. Ley asociativa para la suma.

$$\vec{d} + (\vec{e} + \vec{f}) = (\vec{d} + \vec{e}) + \vec{f}$$

**Leyes del álgebra vectorial²**

Si \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} son vectores, m y n son escalares, entonces

1. $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ Ley conmutativa para la suma
2. $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$ Ley asociativa para la suma
3. $m(n\vec{A}) = (mn)\vec{A} = n(m\vec{A})$ Ley asociativa para la multiplicación
4. $(m+n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A}$ Ley distributiva
5. $m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B}$ Ley distributiva

Observe que en estas leyes sólo la multiplicación de un vector por uno o más escalares está definida. Mas adelante se definen los productos entre vectores.

² Murray R.S. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería y Ciencias*. M^cGrawHill. México.2001. pag.149.

b) Resta gráfica de vectores

La resta de vectores es una suma indicada utilizando el concepto de vector opuesto.

$$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

Tiene la propiedad de no ser conmutativa.

$$\vec{A} - \vec{B} \neq \vec{B} - \vec{A}$$

Ejemplo 1.4

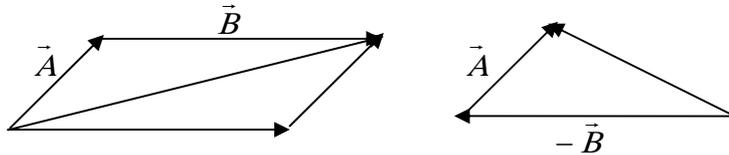
Sean \vec{A} : 20 m 60° \vec{B} : 50 m 0° .

Hallar:

- $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$
- $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$
- $\vec{R} = \vec{B} - \vec{A}$



Recuerde que para la resta gráfica los vectores deben tener un origen común

Solución:**Practica 1.2**

Sean \vec{A} : 30 m 110°

\vec{B} : 50 m 60°

Hallar:

- $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$
- $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$
- $\vec{R} = \vec{B} - \vec{A}$
- Pruebe que $\vec{A} - \vec{B} = -(\vec{B} - \vec{A})$

1.3 OPERACIONES CON VECTORES ANALÍTICAMENTE**1) SUMA ANALÍTICA DE VECTORES**

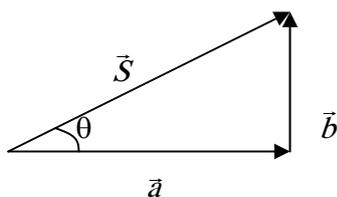
Para sumar vectores analíticamente existen diferentes métodos:

Método de teoremas

Consiste en hallar la resultante de la suma vectorial de dos vectores, utilizando relaciones como el teorema de Pitágoras o el teorema de cosenos y senos.

Teorema de Pitágoras

Cuando los vectores forman un ángulo recto la magnitud de la suma o resultante se obtiene por medio del teorema de Pitágoras y la dirección por la relación trigonométrica tangente.



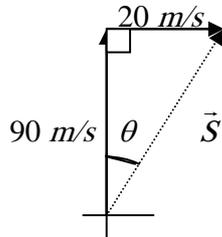
$$|\vec{S}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

Ejercicio 1.3

Un avión vuela hacia el Norte a 90 m/s un fuerte viento sopla hacia el este a razón de 72 km/h y desvía su rumbo. Hallar la velocidad del avión para un observador en la tierra.

Solución:



$$|\vec{S}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

$$|\vec{S}| = \sqrt{(90)^2 + (20)^2}$$

$$\tan \theta = \frac{20}{90}$$

$$|\vec{S}| = \sqrt{8500}$$

$$\tan \theta = 0.22\bar{2}$$

$$|\vec{S}| = 92.2 \text{ m/s}$$

$$\theta = 12.5^\circ$$

Respuesta: \vec{S} : 92.2 m/s, 12.5° (en coordenadas polares)

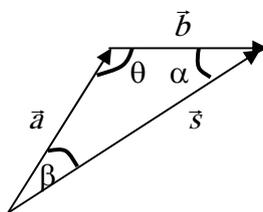
Ejercicio Propuesto:

Al oír la cascabel de una serpiente, usted realiza dos desplazamientos rápidos de 6.0 m y 5.0 m, al oeste y al sur respectivamente. Calcule la magnitud y dirección del desplazamiento resultante utilizando el método del teorema de Pitágoras. Utilice el método gráfico para obtener la respuesta, compare los resultados.

Respuesta:

Teorema de cosenos y senos

Cuando los vectores forman cualquier ángulo la magnitud de la suma o resultante se obtiene por medio del teorema de cosenos y la dirección por el teorema de los senos.



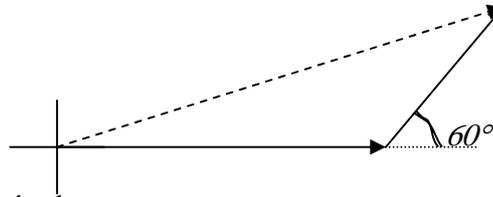
$$|s|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \quad (\text{Ley de cosenos})$$

$$\frac{\text{sen} \alpha}{a} = \frac{\text{sen} \beta}{b} = \frac{\text{sen} \theta}{c} \quad (\text{Ley de senos})$$

Ejercicio 1.4

Dos hombres tiran de un bote, uno aplica una fuerza de 100 N y el otro de 80 N con un ángulo de 60° entre ellas. Hallar la fuerza resultante sobre el bote

Solución:



Para la magnitud

$$|s|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

$$|s|^2 = (100)^2 + (80)^2 - 2(100)(80) \cos 120^\circ$$

$$|s|^2 = 10000 + 6400 - -8000$$

$$|s| = \sqrt{24400}$$

$$|s| = 156.2 \text{ m/s}$$

Para la dirección

$$\frac{\text{sen} \alpha}{a} = \frac{\text{sen} \beta}{b} = \frac{\text{sen} \theta}{c}$$

$$\frac{\text{sen} \beta}{80} = \frac{\text{sen} 120^\circ}{156.2}$$

$$\text{sen} \beta = \frac{80 \text{sen} 120^\circ}{156.2}$$

$$\text{sen} \beta = 0.4435$$

$$\beta = 26.3^\circ$$

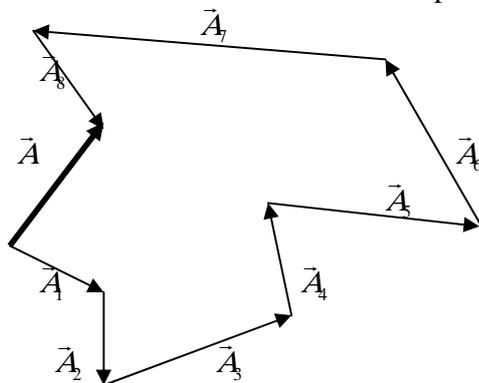
Respuesta: \vec{s} : 156.2 m/s, 26.3° (en coordenadas polares)

Ejercicio Propuesto:

Un conductor de automóvil maneja 3 km en la dirección de 60° noreste y luego 4 km en la dirección norte. ¿Dónde termina respecto de su punto de inicio?. Utilice el método anterior, compare su resultado con su respuesta si utiliza el método gráfico.

Método de componentes rectangulares

Dado un vector puede ser expresado en términos de muchos vectores que se suman consecutivamente llamados vectores componentes del vector.



$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \vec{A}_4 + \vec{A}_5 + \vec{A}_6 + \vec{A}_7 + \vec{A}_8$$

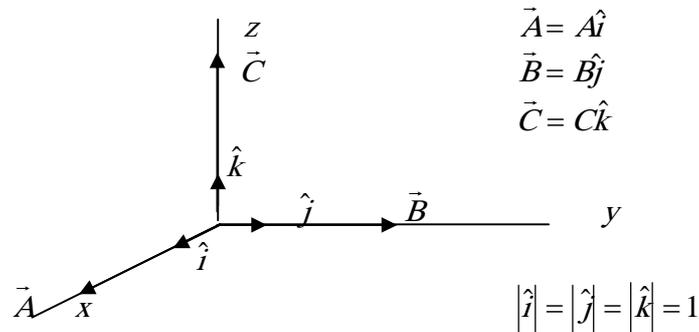
La división de un vector en componentes no es única dado que un vector puede formarse por suma de muy diversas maneras, pero es de mayor utilidad descomponer un vector solo en términos de sus vectores componentes rectangulares o cartesianas.

a) Componentes Rectangulares o Cartesianas de un Vector

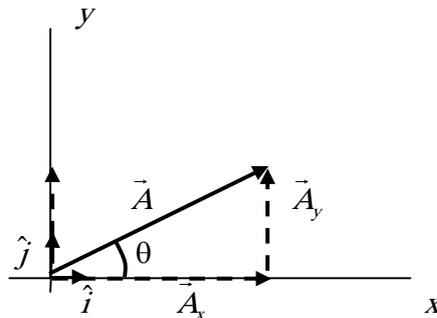
Entre el ilimitado número de posibles divisiones de un vector en componentes tiene especial importancia las que se restringen a la dirección de los ejes cartesianos.

Vectores unitarios rectangulares

Los vectores unitarios rectangulares \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} son vectores unitarios cuya dirección y sentido es la de los ejes positivos x , y , y z de un sistema de coordenadas rectangulares, a menos que se especifique de otra manera. Tales sistemas derivan su nombre del hecho de que un tornillo de rosca derecha girado 90° de Ox a Oy , avanzará en la dirección z positiva. Se dice que tres vectores que tienen puntos iniciales coincidentes, y que no son coplanares forman un *sistema derecho o sistema diestro* si un tornillo de rosca derecha girado en un ángulo menor que 180° de \vec{A} a \vec{B} avanza en la dirección \vec{C}



Componentes de un vector en el plano



\vec{A}_x : componente en la dirección del eje X

\vec{A}_y : componente en la dirección del eje Y

$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$:Definición de suma de vectores

Utilizando los vectores unitarios, se tiene

$$\vec{A}_x = A_x \hat{i}$$

$$\vec{A}_y = A_y \hat{j}$$

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

Módulo o magnitud del vector

Usando el teorema de Pitágoras se tiene

$$|\vec{A}|^2 = |\vec{A}_x|^2 + |\vec{A}_y|^2 \quad : \text{ los vectores unitarios tienen magnitud unitaria.}$$

$$|\vec{A}| = +\sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad : \text{ magnitud del vector.}$$

Relaciones útiles

$$A_x = A \cos \theta \quad \Leftarrow \quad \frac{A_x}{A} = \cos \theta$$

$$A_y = A \operatorname{sen} \theta \quad \Leftarrow \quad \frac{A_y}{A} = \operatorname{sen} \theta$$

$$\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$$

$$\theta = \operatorname{arc} \tan \left(\frac{A_y}{A_x} \right) \quad \text{dirección del vector.}$$

Ejercicio 1.5

Calcule las componentes x , y de los siguientes vectores:

$$\vec{a} : 12 \text{ m, N } 37^\circ \text{ E}$$

$$\vec{b} : 15 \text{ m, } -40^\circ$$

$$\vec{c} : 6 \text{ m, } 60^\circ \text{ con } x \text{ negativo en el tercer cuadrante}$$

Solución:

$$a_x = a \cos \theta \quad b_x = b \cos \theta \quad c_x = c \cos \theta$$

$$a_x = 12 \text{ m} \cos 53^\circ \quad b_x = 15 \text{ m} \cos -40^\circ \quad c_x = 6 \text{ m} \cos 240^\circ$$

$$a_x = 7.2 \text{ m} \quad b_x = 11.5 \text{ m} \quad c_x = -3 \text{ m}$$

$$a_y = a \operatorname{sen} \theta \quad b_y = b \operatorname{sen} \theta \quad c_y = c \operatorname{sen} \theta$$

$$a_y = 12 \text{ m} \operatorname{sen} 53^\circ \quad b_y = 15 \text{ m} \operatorname{sen} -40^\circ \quad c_y = 6 \text{ m} \operatorname{sen} 240^\circ$$

$$a_y = 9.6 \text{ m} \quad b_y = -9.6 \text{ m} \quad c_y = -5.2 \text{ m}$$

$$\therefore \vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} \quad \therefore \vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} \quad \therefore \vec{c} = c_x \hat{i} + c_y \hat{j}$$

$$\therefore \vec{a} = (7.2\hat{i} + 9.6\hat{j}) \text{ m} \quad \therefore \vec{b} = (11.5\hat{i} - 9.6\hat{j}) \text{ m} \quad \therefore \vec{c} = (-3\hat{i} - 5.2\hat{j}) \text{ m}$$

Ejercicio Propuesto:

Calcule las componentes x , y de los siguientes vectores:

$$\vec{A} : 2.4 \text{ m, S } 20^\circ \text{ O}$$

$$\vec{B} : 1.7 \text{ m, } -120^\circ$$

$$\vec{C} : 3.4 \text{ m, } 30^\circ \text{ con } x \text{ negativo en el segundo cuadrante}$$

Ejercicio 1.6

Calcule la magnitud y dirección del vector representado por los siguientes pares de componentes:

a) $A_x = 3.6 \text{ cm}$, $A_y = -7.2 \text{ cm}$

b) $B_x = -1.4 \text{ cm}$, $B_y = -9.35 \text{ cm}$

Solución:

$$|\vec{A}| = +\sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$|\vec{A}| = +\sqrt{(3.6)^2 + (-7.2)^2}$$

$$|\vec{A}| = +\sqrt{64.8}$$

$$|\vec{A}| = +8.04 \text{ cm}$$

$$|\vec{B}| = +\sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

$$|\vec{B}| = +\sqrt{(-1.4)^2 + (-9.35)^2}$$

$$|\vec{B}| = +\sqrt{89.4}$$

$$|\vec{B}| = +9.45 \text{ cm}$$

$$\tan \theta = \frac{-7.2}{3.6}$$

$$\theta = -63.4^\circ$$

$$\tan \beta = \frac{-9.35}{-1.4}$$

$$\beta = 81.5^\circ$$

Respuestas: \vec{A} : 8.04 cm, -63.4° ; \vec{B} : 9.45 cm, 81.5°

Ejercicio Propuesto:

Calcule la magnitud y dirección del vector representado por los siguientes pares de componentes:

a) $a_x = -2.34 \text{ km}$, $a_y = 8.70 \text{ km}$

b) $b_x = 1.60 \text{ km}$, $b_y = 5.75 \text{ km}$

b) Suma de varios vectores en el plano

Sean los siguientes vectores, todos en el plano XY

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j}$$

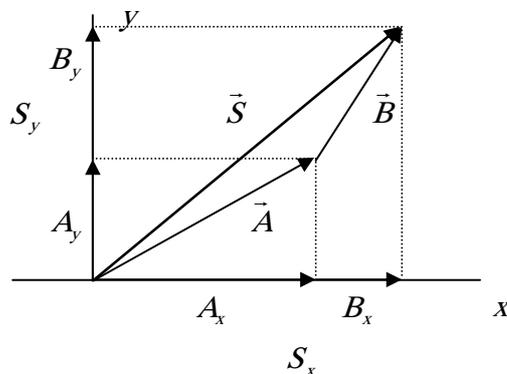
$$\vec{C} = C_x \hat{i} + C_y \hat{j}$$

.....

Sumando los vectores se tiene

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \dots$$

$$\vec{S} = (A_x + B_x + C_x + \dots) \hat{i} + (A_y + B_y + C_y + \dots) \hat{j}$$



$S_x = (A_x + B_x + C_x + \dots)$: suma de las componentes en la dirección del eje X

$S_y = (A_y + B_y + C_y + \dots)$: suma de las componentes en la dirección del eje Y

$\vec{S} = S_x \hat{i} + S_y \hat{j}$: vector resultante

$|\vec{S}| = +\sqrt{S_x^2 + S_y^2}$: magnitud del vector resultante

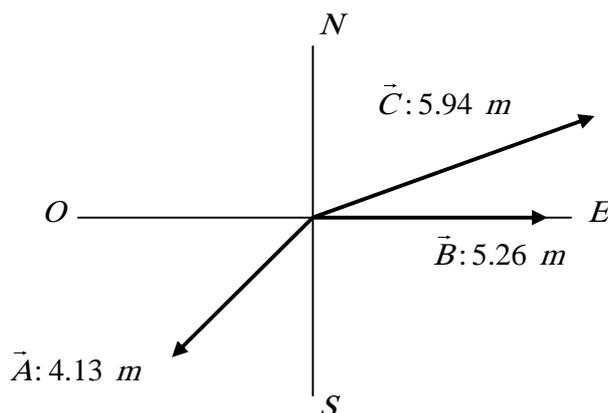
$$\tan \theta = \frac{S_y}{S_x}$$

$\theta = \arctan \left(\frac{S_y}{S_x} \right)$: ángulo que forma el vector resultante

Ejercicio 1.7

Una partícula experimenta tres desplazamientos sucesivos en un plano, como sigue: 4.13 m SO, 5.26 m E, y 5.94 m en una dirección de 64° NE. Elija el eje x apuntando al este y el eje y apuntando hacia el norte, y halle (a) las componentes de cada desplazamiento, (b) las componentes del desplazamiento resultante, (c) la magnitud y dirección del desplazamiento resultante, y (d) el desplazamiento que se requerirá para traer de nuevo a la partícula hasta el punto del arranque.³

Solución:



$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & A_x = A \cos \theta & B_x = B \cos \theta & C_x = C \cos \theta \\ & A_x = 4.13 \text{ m} \cos 225^\circ & B_x = 5.26 \text{ m} \cos 0^\circ & C_x = 5.94 \text{ m} \cos 26^\circ \\ & A_x = -2.9 \text{ m} & B_x = 5.26 \text{ m} & C_x = 5.34 \text{ m} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} & A_y = A \sin \theta & B_y = B \sin \theta & C_y = C \sin \theta \\ & A_y = 4.13 \text{ m} \sin 225^\circ & B_y = 5.26 \text{ m} \sin 0^\circ & C_y = 5.94 \text{ m} \sin 26^\circ \\ & A_y = -2.9 \text{ m} & B_y = 0 \text{ m} & C_y = 2.6 \text{ m} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \therefore \vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} & \therefore \vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} & \therefore \vec{C} = C_x \hat{i} + C_y \hat{j} \\ \therefore \vec{A} = (-2.9 \hat{i} - 2.9 \hat{j}) \text{ m} & \therefore \vec{B} = (5.26 \hat{i} + 0 \hat{j}) \text{ m} & \therefore \vec{C} = (5.3 \hat{i} + 2.6 \hat{j}) \text{ m} \end{array}$$

³ Resnick, R. Física Vol.1. Cuarta Edición. Compañía Editorial Continental, S.A. México. 1999. Pb:22

(b)

$$\vec{A} = (-2.9\hat{i} - 2.9\hat{j}) \text{ m}$$

$$\vec{B} = (5.26\hat{i} + 0\hat{j}) \text{ m}$$

$$\vec{C} = (5.3\hat{i} + 2.6\hat{j}) \text{ m}$$

$$\vec{S} = (7.7\hat{i} - 0.3\hat{j}) \text{ m}$$

(c)

$$S = +\sqrt{S_x^2 + S_y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{S_y}{S_x}$$

$$S = +\sqrt{(7.7)^2 + (-0.3)^2}$$

$$\tan \theta = \frac{-0.3}{7.7}$$

$$S = +7.7 \text{ m}$$

$$\theta = -2.2^\circ$$

(d)

el desplazamiento que se requerirá para traer de nuevo a la partícula hasta el punto del arranque es de 7.7 m.

Ejercicio Propuesto:

El vector \vec{A} es de 2.80 cm y está 60° sobre el eje x en el primer cuadrante. \vec{B} es de 1.90 cm y está 60° por debajo del eje x en el cuarto cuadrante. Obtenga la magnitud y dirección de $\vec{A} + \vec{B}$. Dibuje un diagrama de la suma y muestre que sus respuestas numéricas concuerdan con las de su dibujo⁴.

c) Componentes de un vector en el espacio tridimensional

El procedimiento desarrollado para los vectores en el plano se extiende al espacio tridimensional de la siguiente forma. Cualquier vector \vec{A} en tres dimensiones se representa con su punto inicial en el origen O de un sistema de coordenadas rectangulares. Sean (A_x, A_y, A_z) las coordenadas rectangulares del punto terminal de un vector \vec{A} con punto inicial en O. Los vectores $\vec{A}_x = A_x\hat{i}$, $\vec{A}_y = A_y\hat{j}$, $\vec{A}_z = A_z\hat{k}$ reciben el nombre de *componentes rectangulares de un vector o simplemente vectores componentes* en las direcciones de x , y , y z respectivamente. Por comodidad en la notación cada vector componente se expresa por la magnitud de la componente por un vector unitario en cada eje. A estos vectores unitarios se les designa por \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} donde:

\hat{i} = vector unitario en el eje $x = (1,0,0)$

\hat{j} = vector unitario en el eje $y = (0,1,0)$

\hat{k} = vector unitario en el eje $z = (0,0,1)$

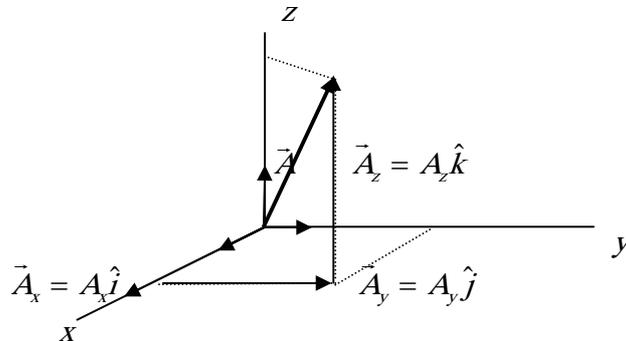
Por lo tanto un vector en componentes rectangulares de tres dimensiones se escribe de la siguiente manera.

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

⁴ Sears F.W. Física Universitaria. Novena edición. Pearson Educación. México. 1999. Pb.1-37

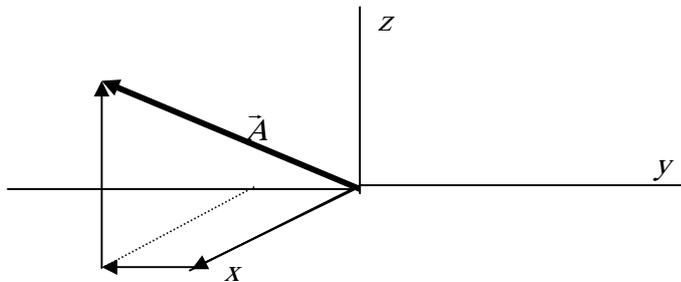
donde (A_x, A_y, A_z) son las magnitudes de los vectores componentes rectangulares o sea las proyecciones del vector sobre los ejes x, y y z .



De esta manera el vector queda expresado así $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

Ejercicio 1.8

Representar el vector $\vec{A}: (3, -2, 3)$

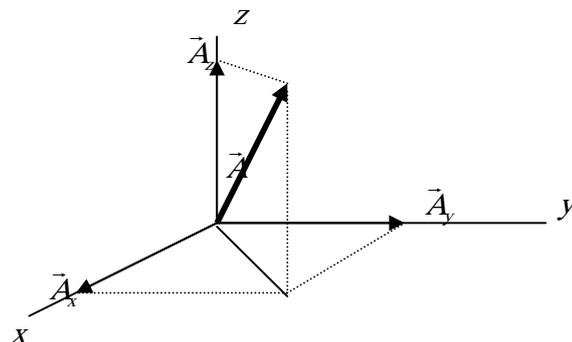


Practica 1.3

Represente los siguientes vectores $(2, 2, 4)$, $(-2, 4, 3)$

Magnitud de un vector en tres dimensiones

La magnitud se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras dos veces.



$$|\vec{A}| = \sqrt{\left(\sqrt{A_x^2 + A_y^2}\right)^2 + A_z^2}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} : \text{Magnitud del vector}$$

Dirección de un vector en tres dimensiones

La dirección del vector \vec{A} en tres dimensiones se puede obtener de dos maneras:

a) por medio de los cosenos de los ángulos directores

Son los ángulos que el vector forma con cada eje.

α = ángulo entre el vector y el eje x

β = ángulo entre el vector y el eje y

γ = ángulo entre el vector y el eje z

Los cosenos son respectivamente

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|} \Rightarrow A_x = |\vec{A}| \cos \alpha$$

$$\cos \beta = \frac{A_y}{|\vec{A}|} \Rightarrow A_y = |\vec{A}| \cos \beta$$

$$\cos \gamma = \frac{A_z}{|\vec{A}|} \Rightarrow A_z = |\vec{A}| \cos \gamma$$



α, β, γ
son los
ángulos
directores

Luego se obtiene la función inversa para obtener cada ángulo. Por lo tanto todo vector en tres dimensiones se puede expresar con los ángulos directores así.

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{A} = |\vec{A}| \cos \alpha \hat{i} + |\vec{A}| \cos \beta \hat{j} + |\vec{A}| \cos \gamma \hat{k}$$

donde

$$A^2 = A^2 \cos^2 \alpha + A^2 \cos^2 \beta + A^2 \cos^2 \gamma$$

b) por medio de los ángulos θ y ϕ de las coordenadas esféricas

Definimos dos ángulos; θ como el ángulo que hace el vector con el eje Z y ϕ como el ángulo que hace la proyección del vector sobre el plano XY con el eje X positivo (ver figura). Estos ángulos están dados de la siguiente forma:

$$\cos \theta = \frac{A_z}{A} \Rightarrow A_z = A \cos \theta$$

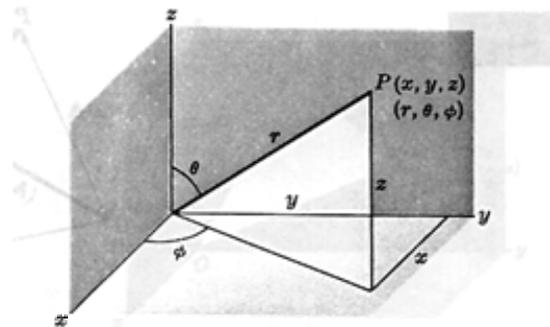
$$\tan \phi = \frac{A_y}{A_x} \Rightarrow A_y = A_x \tan \phi$$

con esto se puede demostrar que:

$$A_x = A \sin \theta \cos \phi$$

$$A_y = A \sin \theta \sin \phi$$

$$A_z = A \cos \theta$$



A las variables (r, θ, ϕ) se les llama *coordenadas esféricas*. En nuestro caso $r = A$. Por lo tanto todo vector en tres dimensiones se puede expresar de la siguiente forma.

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{A} = A \sin \theta \cos \phi \hat{i} + A \sin \theta \sin \phi \hat{j} + A \cos \theta \hat{k}$$

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{|\vec{F}|} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{160.7}{500} \Rightarrow \alpha = 71.2^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{F_y}{|\vec{F}|} \Rightarrow \cos \beta = \frac{278.3}{500} \Rightarrow \beta = 56.2^\circ$$

b) Por medio de coordenadas esféricas

Como $\theta = 40^\circ$ y $\phi = 60^\circ$, tenemos

$$\begin{aligned} F_x &= F \operatorname{sen} \theta \cos \phi & F_y &= F \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi & F_z &= F \cos \theta \\ F_x &= 500 N \operatorname{sen} 40^\circ \cos 60^\circ & F_y &= 500 N \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 60^\circ & F_z &= 500 N \cos 40^\circ \\ F_x &= 160.7 N & F_y &= 278.3 N & F_z &= 383.0 N \end{aligned}$$

Los ángulos se obtienen como en el caso anterior.

Ejercicio Propuesto:

Una fuerza F actúa en el origen de un sistema en una dirección dado por $\alpha = 75^\circ$ y $\gamma = 130^\circ$. Sabiendo que $F_y = 300$ N.

Hallar:

- La fuerza F
- Las componentes F_x y F_z
- El ángulo β

Respuesta: $F = 416.1 N, F_x = 107.7 N, F_z = 267.4 N, \beta = 43.8^\circ$

d) Suma de vectores en el espacio

La suma de vectores en el espacio se realiza de manera similar a la empleada para los vectores en el plano.

Sean los siguientes vectores,

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

$$\vec{C} = C_x \hat{i} + C_y \hat{j} + C_z \hat{k}$$

.....

Sumando los vectores se tiene

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \dots$$

$$\vec{S} = (A_x + B_x + C_x + \dots) \hat{i} + (A_y + B_y + C_y + \dots) \hat{j} + (A_z + B_z + C_z + \dots) \hat{k}$$

$S_x = (A_x + B_x + C_x + \dots)$: suma de las componentes en la dirección del eje X

$S_y = (A_y + B_y + C_y + \dots)$: suma de las componentes en la dirección del eje Y

$S_z = (A_z + B_z + C_z + \dots)$: suma de las componentes en la dirección del eje Z

$$\vec{S} = S_x \hat{i} + S_y \hat{j} + S_z \hat{k} : \text{vector resultante}$$

$$|\vec{S}| = +\sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} : \text{magnitud del vector resultante.}$$

La *dirección* se obtiene por medio de una de las formas mencionadas anteriormente.

Ejercicio 1.11

Dados los vectores:

$$\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\vec{c} = -\hat{i} - 6\hat{j}$$

Hallar:

a) $\vec{S} = \frac{1}{2} \{ \vec{a} + 3(\vec{b} + \vec{c}) \}$

b) la magnitud y dirección de \vec{S}

c) Un vector unitario en la dirección de \vec{a}

d) Un vector opuesto a \vec{b}

e) El vector $5\vec{a}$

Solución:

(a)

$$\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\vec{c} = -\hat{i} - 6\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$(\vec{b} + \vec{c}) = -3\hat{i} - 5\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$3(\vec{b} + \vec{c}) = -9\hat{i} - 15\hat{j} + 15\hat{k}$$

$$\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\vec{a} + 3(\vec{b} + \vec{c}) = -6\hat{i} - 13\hat{j} + 11\hat{k}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \{ \vec{a} + 3(\vec{b} + \vec{c}) \} = -\frac{6}{2}\hat{i} - \frac{13}{2}\hat{j} + \frac{11}{2}\hat{k}$$

$$\vec{S} = -3\hat{i} - 6.5\hat{j} + 5.5\hat{k}$$

(b)

$$|\vec{S}| = +\sqrt{(-3)^2 + (-6.5)^2 + (5.5)^2}$$

$$|\vec{S}| = 9.03$$

dirección con ángulos directores:

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-3}{9.03} \Rightarrow \alpha = 109.4^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{A_y}{|\vec{A}|} \Rightarrow \cos \beta = \frac{-6.5}{9.03} \Rightarrow \beta = 136.0^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{A_z}{|\vec{A}|} \Rightarrow \cos \gamma = \frac{5.5}{9.03} \Rightarrow \gamma = 52.5^\circ$$

Respuesta: $\vec{S}: 9.03, \alpha = 109.4^\circ, \beta = 136.0^\circ, \gamma = 52.5^\circ$

dirección con coordenadas esféricas:

$$\cos \theta = \frac{A_z}{A} \Rightarrow \cos \theta = \frac{5.5}{9.03} \Rightarrow \theta = 52.5^\circ$$

$$\tan \phi = \frac{A_y}{A_x} \Rightarrow \tan \phi = \frac{-6.5}{-3} \Rightarrow \phi = 65.2^\circ$$

Respuesta: $\vec{S}: 9.03, \theta = 52.5^\circ, \phi = 65.2^\circ$

(c)

$$\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{a_x}{a}\hat{i} + \frac{a_y}{a}\hat{j} + \frac{a_z}{a}\hat{k} \quad : \text{vector unitario en coordenadas rectangulares}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$a = \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (-4)^2}$$

$$a = 5.4$$

$$\hat{a} = \frac{3}{5.4}\hat{i} + \frac{2}{5.4}\hat{j} + \frac{-4}{5.4}\hat{k}$$

$$\hat{a} = 0.55\hat{i} + 0.37\hat{j} - 0.74\hat{k} \quad : \text{vector unitario en la dirección de } \vec{a}$$

(d)

$$\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$$

$$-\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k}$$

(e)

$$\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$5\vec{a} = 15\hat{i} + 10\hat{j} - 20\hat{k}$$

Ejercicio Propuesto:

Dados los vectores:

$$\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{B} = 4\hat{i} + 3\hat{k}$$

$$\vec{C} = \hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$$

Hallar:

a) $\vec{S} = \vec{A} + 2(\vec{B} + \vec{C})$

b) la magnitud y dirección de \vec{C}

c) Un vector unitario en la dirección de \vec{B}

d) Un vector opuesto a \vec{A}

e) Representar el vector \vec{C}

e) Resta de vectores en el plano y en el espacio

Sean los siguientes vectores,

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

Realizando la resta $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$ se tiene

$$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$$

$$\vec{R} = (A_x - B_x) \hat{i} + (A_y - B_y) \hat{j} + (A_z - B_z) \hat{k}$$

$R_x = (A_x - B_x)$: resta de las componentes en la dirección del eje X

$R_y = (A_y - B_y)$: resta de las componentes en la dirección del eje Y

$R_z = (A_z - B_z)$: resta de las componentes en la dirección del eje Z

$$\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} + R_z \hat{k} \quad : \text{vector resultante}$$

Ejercicio 1.12

Dados los vectores:

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\vec{B} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\vec{C} = -2\hat{i} - 6\hat{j}$$

Hallar:

a) $\vec{R} = \frac{1}{2} \{ \vec{A} - 3(\vec{B} - \vec{C}) \}$

b) Demuestre que $(\vec{C} - \vec{B}) = -(\vec{B} - \vec{C})$

c) la magnitud y dirección de \vec{C}

d) Un vector unitario en la dirección de \vec{A}

e) $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} = 0$ Hallar \vec{D}

Solución:

(a)

$$\vec{B} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\vec{C} = -2\hat{i} - 6\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$(\vec{B} - \vec{C}) = 0\hat{i} + 9\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$3(\vec{B} - \vec{C}) = 0\hat{i} + 27\hat{j} + 15\hat{k}$$

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$-3(\vec{B} - \vec{C}) = 0\hat{i} - 27\hat{j} - 15\hat{k}$$

$$\vec{A} - 3(\vec{B} - \vec{C}) = 2\hat{i} - 22\hat{j} - 19\hat{k}$$

$$\vec{R} = \frac{1}{2} \{ \vec{A} - 3(\vec{B} - \vec{C}) \} = \frac{2}{2} \hat{i} - \frac{22}{2} \hat{j} - \frac{19}{2} \hat{k}$$

$$\vec{R} = \hat{i} - 11\hat{j} - 9.5\hat{k}$$

(b)

Demuestre que $(\vec{C} - \vec{B}) = -(\vec{B} - \vec{C})$

$$(\vec{B} - \vec{C}) = 0\hat{i} + 9\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$-(\vec{B} - \vec{C}) = 0\hat{i} - 9\hat{j} - 5\hat{k}$$

$$\vec{C} = -2\hat{i} - 6\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\vec{B} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$(\vec{C} - \vec{B}) = 0\hat{i} - 9\hat{j} - 5\hat{k}$$

(c)

$$\vec{C} = -2\hat{i} - 6\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$C = +\sqrt{(-2)^2 + (-6)^2}$$

$$C = 6.32$$

dirección para un vector en dos dimensiones:

$$\tan \theta = \frac{C_y}{C_x} \quad \Rightarrow \tan \theta = \frac{-6}{-2} \quad \Rightarrow \theta = 71.5^\circ$$

Respuesta: $\vec{C}: 6.32, \theta = 71.5^\circ$ (en coordenadas polares)

(d)

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x}{A} \hat{i} + \frac{A_y}{A} \hat{j} + \frac{A_z}{A} \hat{k}$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$A = \sqrt{(2)^2 + (5)^2 + (-4)^2}$$

$$A = 6.7$$

$$\hat{A} = \frac{2}{6.7} \hat{i} + \frac{5}{6.7} \hat{j} + \frac{-4}{6.7} \hat{k}$$

$$\hat{A} = 0.30\hat{i} + 0.74\hat{j} - 0.60\hat{k} \quad : \text{ vector unitario en la dirección de } \vec{A}$$

(e)

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} = 0 \text{ Hallar } \vec{D}$$

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\vec{B} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\vec{C} = -2\hat{i} - 6\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{D} = -(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$$

$$\vec{D} = -(-2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$$

$$\vec{D} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$$

Ejercicio Propuesto:

Dados los vectores:

$$\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\vec{c} = -\hat{i} - 6\hat{j}$$

Hallar:

a) $\vec{S} = \frac{1}{2} \{ \vec{a} - 3(\vec{b} - \vec{c}) \}$

b) la magnitud y dirección de \vec{c}

b) Un vector unitario en la dirección de \vec{b}

c) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 0$ Hallar \vec{d}

d) Un vector opuesto a \vec{a}

e) Representar el vector \vec{c}

2) MULTIPLICACIÓN DE VECTORES

Definiremos tres clases de operaciones de multiplicación por vectores:

- 1- Multiplicación de un vector por un escalar
- 2- Multiplicación de dos vectores para dar por resultado un escalar
(*PRODUCTO ESCALAR O PRODUCTO PUNTO*)
- 3- Multiplicación de dos vectores para dar como resultado otro vector
(*PRODUCTO VECTORIAL O CRUZ*)

a) Multiplicación de un vector por un escalar

Sea

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \quad : \text{ un vector dado}$$

$$m \quad : \text{ un escalar}$$

Se define el producto del escalar (m) por el vector \vec{A} como el vector

$$m\vec{A} = mA_x\hat{i} + mA_y\hat{j} + mA_z\hat{k}$$

tal que :

$$m > 0 \quad m\vec{A} \quad : \text{ tiene la dirección y sentido de } \vec{A}$$

$$m < 0 \quad m\vec{A} \quad : \text{ es de sentido opuesto a } \vec{A}$$

$$m = 0 \quad m\vec{A} = 0 \quad : \text{ el resultado es el vector nulo}$$

su magnitud es

$$|m\vec{A}| = |m| |\vec{A}|$$

Ejemplo:

$$\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k} \quad \text{y} \quad m = 4$$

Por lo tanto

$$4\vec{A} = (4)2\hat{i} - (4)3\hat{j} + (4)\hat{k} = 8\hat{i} - 12\hat{j} + 4\hat{k}$$

b) Multiplicación de dos vectores para dar por resultado un escalar (**PRODUCTO ESCALAR O PRODUCTO PUNTO**)

El producto escalar de dos vectores \vec{A} y \vec{B} , denotado por $\vec{A} \cdot \vec{B}$ (léase \vec{A} punto \vec{B}) se define como el producto de las magnitudes de \vec{A} y \vec{B} por el coseno del ángulo entre ellos. Simbólicamente,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

Observe que $\vec{A} \cdot \vec{B}$ es un escalar y no un vector.

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

Recuerde que el resultado de $\vec{A} \cdot \vec{B}$ es un número no un vector



Commutatividad del producto escalar

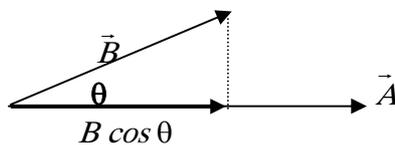
De la definición del producto escalar se tiene

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= AB \cos \theta \\ &= BA \cos \theta \\ &= \vec{B} \cdot \vec{A} \end{aligned}$$

Representación geométrica del producto escalar

Geoméricamente el producto escalar es la magnitud de un vector por la proyección del otro sobre él, así

A : magnitud del vector \vec{A}
 $B \cos \theta$: proyección del vector \vec{B} sobre el vector \vec{A}



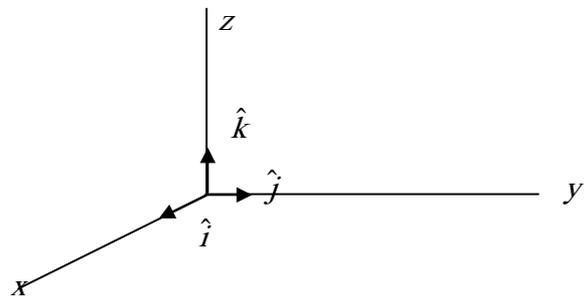
Producto escalar en componentes cartesianas

Aplicando la definición del producto escalar a las unidades vectoriales cartesianas, se tiene

$$\begin{aligned} \hat{i} \cdot \hat{i} &= |\hat{i}| |\hat{i}| \cos 0^\circ = 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= |\hat{i}| |\hat{j}| \cos 90^\circ = 0 \end{aligned}$$

De esta manera tenemos los resultados

$$\begin{aligned} \hat{i} \cdot \hat{i} &= \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0 \end{aligned}$$



Estos resultados se aplican a la multiplicación de vectores expresados en componentes rectangulares o cartesianas

Sean los vectores

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

Multiplicando ambos vectores termino a termino, obtenemos:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= A_x \hat{i} \cdot B_x \hat{i} + A_x \hat{i} \cdot B_y \hat{j} + A_x \hat{i} \cdot B_z \hat{k} + A_y \hat{j} \cdot B_x \hat{i} + A_y \hat{j} \cdot B_y \hat{j} + A_y \hat{j} \cdot B_z \hat{k} + A_z \hat{k} \cdot B_x \hat{i} + A_z \hat{k} \cdot B_y \hat{j} + A_z \hat{k} \cdot B_z \hat{k} \\ &= A_x B_x \hat{i} \cdot \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \cdot \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \cdot \hat{k} + A_y B_x \hat{j} \cdot \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \cdot \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \cdot \hat{k} + A_z B_x \hat{k} \cdot \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \cdot \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \cdot \hat{k} \\ &= A_x B_x \hat{i} \cdot \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \cdot \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \cdot \hat{k} \end{aligned}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad : \text{ producto escalar en términos de las componentes}$$

Relacionando la definición de producto escalar con el resultado anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= AB \cos \theta \\ \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \\ AB \cos \theta &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\cos \theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{AB} : \text{ ángulo entre los vectores } \vec{A} \text{ y } \vec{B}$$

Propiedades del Producto Escalar

1-El resultado de un producto escalar es un número.

2-El producto escalar satisface la propiedad conmutativa

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

3-El producto escalar satisface la propiedad distributiva respecto a la suma

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

4-Si $\theta = 0^\circ$ el producto escalar de vectores paralelos es

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos 0^\circ = AB \Rightarrow \text{ es el máximo}$$

5-El producto escalar de dos vectores iguales es

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = AA \cos 0^\circ = AA = A^2$$

6-Si $\theta = 90^\circ$ el producto escalar de vectores perpendiculares diferentes de cero es

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos 90^\circ = 0$$

7-Si $\theta = 180^\circ$ el producto escalar de vectores opuestos es

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos 180^\circ = -AB \Rightarrow \text{ es un número negativo}$$

Ejercicio 1.13

Sean dos vectores de 35 y 75 unidades respectivamente que forman entre sí un ángulo de 34° . Calcular su producto escalar.

Solución:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (35)(75) \cos 34^\circ$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 2176.2$$

Ejercicio 1.14

Calcular el producto escalar de dos vectores de 5 y 12 unidades respectivamente si son:

- consecutivos colineales
- opuestos
- perpendiculares
- Obtenga el producto escalar de un vector consigo mismo

Solución:

(a)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (5)(12) \cos 0^\circ$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 60$$

(b)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (5)(12) \cos 180^\circ$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -60$$

(c)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (5)(12) \cos 90^\circ$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

(d)

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = AA \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = (5)(5) \cos 0^\circ$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = 25$$

Ejercicio 1.15

Sean los vectores:

$$\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\vec{c} = -\hat{i} - 6\hat{j}$$

Hallar:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$ ¿Son los vectores perpendiculares?
- Calcular el ángulo entre \vec{a} y \vec{b}
- $3(\vec{a} \cdot \vec{b}) =$

$$d) S = \frac{1}{3} \{ \vec{a} \cdot 2(\vec{b} + \vec{c}) \}$$

Solución:

(a)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3) \cdot (-2) + (2) \cdot (1) + (-4) \cdot (5)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -24$$



Dos vectores son perpendiculares si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ¿Por que?

∴ los vectores no son perpendiculares, pues, el producto escalar no es igual a cero.

(b)

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab} \quad : \text{ángulo entre los vectores } \vec{a} \text{ y } \vec{b}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$a = \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (-4)^2}$$

$$a = 5.4$$

$$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$$

$$b = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (5)^2}$$

$$b = 5.5$$

$$\cos \theta = \frac{-24}{(5.4)(5.5)}$$

$$\theta = 143.9^\circ \quad : \text{ángulo entre los vectores } \vec{a} \text{ y } \vec{b}$$

(c)

$$3(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 3(-24)$$

$$3(\vec{a} \cdot \vec{b}) = -72$$

(d)

$$S = \frac{1}{3} \{ \vec{a} \cdot 2(\vec{b} + \vec{c}) \}$$

$$\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\vec{c} = -\hat{i} - 6\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$(\vec{b} + \vec{c}) = -3\hat{i} - 5\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$2(\vec{b} + \vec{c}) = -6\hat{i} - 10\hat{j} + 10\hat{k}$$

$$\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\vec{a} \cdot 2(\vec{b} + \vec{c}) = (-6)(3) + (-10)(2) + (10)(-4)$$

$$\vec{a} \cdot 2(\vec{b} + \vec{c}) = -78$$

$$S = \frac{1}{3} \{ \vec{a} \cdot 2(\vec{b} + \vec{c}) \} = \frac{1}{3} (-78)$$

$$S = -26$$

Ejercicio Propuesto:

1. Datos los vectores

$$\begin{aligned}\vec{A} &: 6 \text{ u } 60^\circ \\ \vec{B} &: 9 \text{ u } 225^\circ\end{aligned}$$

Hallar:

 $\vec{A} \cdot \vec{B} = ?$ y el ángulo entre los vectores

2. Haciendo uso del producto escalar obtener la relación conocida con el nombre de teorema de los cosenos.

c) **Multipliación de dos vectores para dar como resultado otro vector (*PRODUCTO VECTORIAL O CRUZ*)**

El producto vectorial de \vec{A} y \vec{B} es un vector $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ (léase \vec{A} cruz \vec{B}). La magnitud de $\vec{A} \times \vec{B}$ se define como el producto de las magnitudes de \vec{A} y \vec{B} por el seno del ángulo entre ellos. La dirección del vector $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ es perpendicular al plano formado por \vec{A} y \vec{B} de modo que \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} forman un sistema derecho. Así

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \operatorname{sen} \theta \hat{u} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

donde \hat{u} es un vector unitario que indica la dirección de $\vec{A} \times \vec{B}$. La magnitud del producto vectorial esta dada por $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \operatorname{sen} \theta$.

Anticonmutatividad del producto vectorial

Tenemos que

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$$

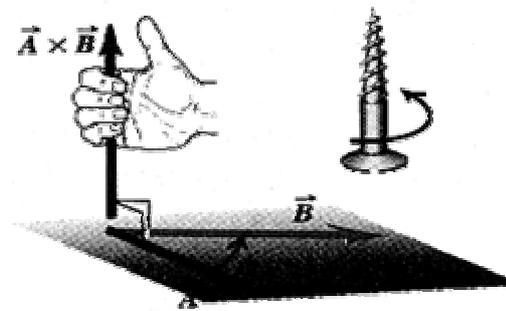
pues

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{u} AB \operatorname{sen} \theta$$

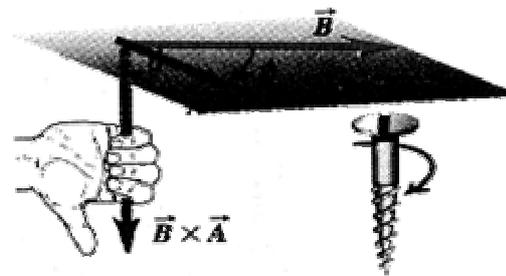
$$\vec{B} \times \vec{A} = -\hat{u} BA \operatorname{sen} \theta$$

$$\Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

Esto es conocido como "la regla de la mano derecha"

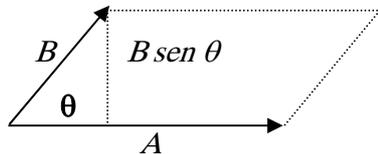


(a)



Representación geométrica del producto vectorial

La magnitud del producto vectorial geoméricamente se representa como la magnitud del vector \vec{A} por la componente del vector \vec{B} perpendicular al vector \vec{A} . Lo que es igual al área del paralelogramo formado por los dos vectores.



$$|\vec{A} \times \vec{B}| = A(B \text{ sen } \theta)$$

Producto vectorial de unidades cartesianas

Aplicando la definición del producto vectorial a las unidades vectoriales cartesianas, se tiene

$$\hat{i} \times \hat{i} = |\hat{i}||\hat{i}| \text{ sen } 0^\circ = 0$$

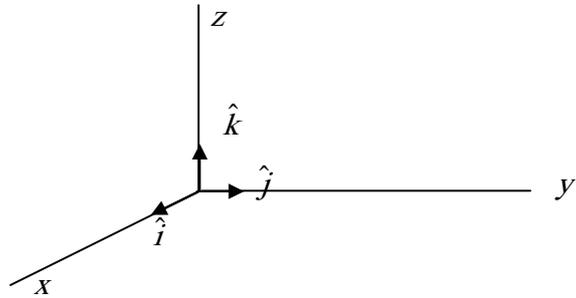
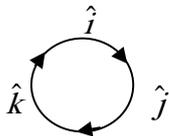
$$\hat{i} \times \hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}| \text{ sen } 90^\circ \hat{k} = \hat{k}$$

De esta manera tenemos los resultados

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

$$\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}, \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}, \quad \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$$

**Regla nemotécnica****Producto vectorial en componentes cartesianas**

Estos resultados se aplican a la multiplicación de vectores expresados en componentes rectangulares o cartesianas

Sean los vectores

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

Multiplicando termino a termino, obtenemos

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

$$= A_x \hat{i} \times B_x \hat{i} + A_x \hat{i} \times B_y \hat{j} + A_x \hat{i} \times B_z \hat{k} + A_y \hat{j} \times B_x \hat{i} + A_y \hat{j} \times B_y \hat{j} + A_y \hat{j} \times B_z \hat{k} + A_z \hat{k} \times B_x \hat{i} + A_z \hat{k} \times B_y \hat{j} + A_z \hat{k} \times B_z \hat{k}$$

$$= A_x B_x \cancel{\hat{i} \times \hat{i}} + A_x B_y \hat{i} \times \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \times \hat{k} + A_y B_x \hat{j} \times \hat{i} + A_y B_y \cancel{\hat{j} \times \hat{j}} + A_y B_z \hat{j} \times \hat{k} + A_z B_x \hat{k} \times \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \times \hat{j} + A_z B_z \cancel{\hat{k} \times \hat{k}}$$

$$= A_x B_y \hat{i} \times \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \times \hat{k} + A_y B_x \hat{j} \times \hat{i} + A_y B_z \hat{j} \times \hat{k} + A_z B_x \hat{k} \times \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \times \hat{j}$$

$$= A_x B_y \hat{k} + A_x B_z (-\hat{j}) + A_y B_x (-\hat{k}) + A_y B_z \hat{i} + A_z B_x \hat{j} + A_z B_y (-\hat{i})$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k} \quad : \text{ producto vectorial en términos de las componentes rectangulares.}$$

Como este procedimiento resulta tedioso se puede utilizar el operador determinante que realiza esta misma operación.

Sean los vectores

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - B_y A_z) \hat{i} - (A_x B_z - B_x A_z) \hat{j} + (A_x B_y - B_x A_y) \hat{k}$$

Tomando la magnitud del producto vectorial podemos encontrar el ángulo entre los vectores.

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \operatorname{sen} \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{AB} \quad : \text{ ángulo entre los vectores } \vec{A} \text{ y } \vec{B}$$

Propiedades del Producto Vectorial

1-El resultado de un producto vectorial es un vector.

2-El producto vectorial no es conmutativa

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

3-El producto vectorial satisface la propiedad distributiva respecto a la suma

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

4-Si $\theta = 0^\circ$ el producto vectorial de vectores paralelos es

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \operatorname{sen} 0^\circ \hat{u} = \vec{0}$$

5-El producto vectorial de dos vectores iguales es

$$\vec{A} \times \vec{A} = AA \operatorname{sen} 0^\circ \hat{u} = \vec{0}$$

6-Si $\theta = 90^\circ$ el producto vectorial de vectores perpendiculares diferentes de cero es

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \operatorname{sen} 90^\circ \hat{u} = AB \hat{u}$$

7-Si $\theta = 180^\circ$ el producto vectorial de vectores opuestos es

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \operatorname{sen} 180^\circ \hat{u} = \vec{0}$$

Ejercicio 1.16

Dados los vectores:

$$\vec{A} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\vec{C} = -\hat{i} - 6\hat{j}$$

Hallar:

a) $\vec{A} \times \vec{B} =$ ¿Son los vectores perpendiculares o paralelos?

b) Calcular el ángulo entre \vec{A} y \vec{B}

c) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) =$

d) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) =$

Solución:

(a)

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 5 - 3 \cdot -1)\hat{i} - (4 \cdot 5 - 2 \cdot -1)\hat{j} + (4 \cdot 3 - 2 \cdot -2)\hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (-10 - 3)\hat{i} - (20 - 2)\hat{j} + (12 - 4)\hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -7\hat{i} - 22\hat{j} + 16\hat{k}$$

Los vectores no son paralelos, pues, $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{0}$.



Dos vectores son paralelos si $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$ ¿Por que?

Para saber si son perpendiculares calculamos el producto escalar.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (4) \cdot (2) + (-2) \cdot (3) + (-1) \cdot (5)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -3$$

∴ los vectores no son perpendiculares.

(b)

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \operatorname{sen} \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{AB} \quad : \text{ángulo entre los vectores } \vec{A} \text{ y } \vec{B}$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$A = \sqrt{(4)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}$$

$$A = 4.6$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

$$B = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (5)^2}$$

$$B = 6.1$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(-7)^2 + (-22)^2 + (16)^2}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = 28.1$$

$$\text{sen}\theta = \frac{28.0}{(4.6)(6.1)}$$

$$\theta = 86.2^\circ$$

(c)

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) =$$

$$\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\vec{C} = -\hat{i} - 6\hat{j}$$

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -6 & 0 \end{vmatrix} = (3 \cdot 0 - -6 \cdot 5)\hat{i} - (2 \cdot 0 - -1 \cdot 5)\hat{j} + (2 \cdot -6 - -1 \cdot 3)\hat{k}$$

$$\vec{B} \times \vec{C} = (0 - -30)\hat{i} - (0 - -5)\hat{j} + (-12 - -3)\hat{k}$$

$$\vec{B} \times \vec{C} = 30\hat{i} - 5\hat{j} - 9\hat{k}$$

$$\vec{A} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (4)(30) + (-2)(-5) + (-1)(-9)$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = 139$$

(d)

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) =$$

$$\vec{B} \times \vec{C} = 30\hat{i} - 5\hat{j} - 9\hat{k}$$

$$\vec{A} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -2 & -1 \\ 30 & -5 & -9 \end{vmatrix} = (-2 \cdot -9 - -5 \cdot -1)\hat{i} - (4 \cdot -9 - 30 \cdot -1)\hat{j} + (4 \cdot -5 - 30 \cdot -2)\hat{k}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = 13\hat{i} + 6\hat{j} + 40\hat{k}$$



¡Me parece que esto se está complicando!
 $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = ?$

Ejercicio 1.17

Un estudiante afirma que ha encontrado un vector \vec{A} tal que

$$(2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) \times \vec{A} = (4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$$

¿Cree usted que esto es cierto? Explique⁵

⁵ Serway . Física I Tomo I.Cuarta Edición. M°Graw Hill. Pb.7,Cap11.

Solución:

Sabemos que el vector resultante de un producto vectorial es perpendicular al plano que contiene a los vectores, por lo tanto si realizamos un producto escalar entre el vector $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ y el vector $4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, debe ser igual a cero pues son perpendiculares.

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= ab \cos \theta & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= (2) \cdot (4) + (-3) \cdot (3) + (4) \cdot (-1) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= -5\end{aligned}$$

\therefore El vector $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ y el vector resultante $4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, no son perpendiculares lo que nos dice que esto no es cierto.

Ejercicio Propuesto:

1. Sean los vectores:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} \\ \vec{b} &= -2\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k} \\ \vec{c} &= -\hat{i} - 6\hat{j}\end{aligned}$$

Hallar:

- $\vec{a} \times \vec{b} =$ ¿Son los vectores perpendiculares?
- Calcular el ángulo entre \vec{a} y \vec{b}
- $3(\vec{a} \times \vec{b}) =$
- $\vec{S} = \frac{1}{3} \{ \vec{a} \times 2(\vec{b} + \vec{c}) \}$

2. Dados los vectores

$$\begin{aligned}\vec{A} &: 6 \text{ u } 60^\circ \\ \vec{B} &: 9 \text{ u } 225^\circ\end{aligned}$$

Hallar:

- $\vec{A} \times \vec{B} = ?$ y el ángulo entre los vectores

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Spiegel, M., *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería y Ciencias*, McGraw-Hill, México, 2001.
- [2] Gonzalez, F. *Principios de Mecánica*, Oficina de Publicaciones de la Universidad de Costa Rica, Costa Rica, 1999.
- [3] Resnick, R., Halliday, D., Krane, K., *Física Vol.1*, Tercera edición, Compañía Editorial Continental, S.A. de C.V., México, 1978.

- [4] Sears F., Zemansky M., Freedman R. *Física Universitaria*, Novena edición. Pearson Educación. México. 1999.
- [5] Calderon, A., *Física para Bachillerato*, Segunda edición ampliada, Costa Rica,. 1989.
- [6] Wilson, J., *Física*, Segunda edición , Prentice Hall Hispanoamericana, S.A, México,. 1996.
- [7] Lea, J., Burke, J., *Física: La Naturaleza de las Cosas*, International Thomson Editores, México,. 1999.
- [8] Giancoli, D., *Física: Principios con Aplicaciones*, Prentice Hall Hispanoamericana, S.A, México,. 1997.